ENSEMBLES MAXIMAUX ACCRÉTIFS ET m-ACCRÉTIFS

PAR

A. CERNES

ABSTRACT

It is proved that if X is a uniformly convex Banach space such that X^* is also uniformly convex and X is not a Hilbert space then there always exists a subset A of $X \times X$ which is maximal accretive but not m-accretive.

Introduction

Soit X un espace de Banach, de norme notée $|\ \ |$.

Un sous-ensemble A de $X \times X$ est dit accrétif si: $\forall (x,u) \in A\, (y,v) \in A$, $\forall \lambda > 0$

$$(1) \qquad |x - y + \lambda(u - v)| \geqq |x - y|.$$

Un tel ensemble est dit maximal accrétif s'il n'est contenu strictement dans aucun sous-ensemble accrétif de $X \times X$.

Un tel ensemble est dit m-accrétif si:

$$\forall z \in H\, \forall \lambda > 0 \quad \exists (x,u) \in A$$

tel que $x + \lambda u = z$.

Il est bien connu (cf. par exemple Browder [2]) que tout ensemble m-accrétif est maximal accrétif.

Minty [9] a montré que, dans un espace de Hilbert tout ensemble maximal accrétif est aussi m-accrétif. Crandal et Liggett [6] et, indépendamment, Calvert [4] ont montré que, si X est un espace l^p, il existe des ensembles maximaux accrétifs non m-accrétifs (Notons que l'espace l^p est uniformément convexe ainsi que son dual).

Received August 31, 1973

Le but de cet article est de montrer que les contre-exemples de [6] et [4] ne sont pas pris au hasard, mais que les seuls espaces X uniformément convexes ainsi que leurs duals X^* qui verifient la propriété démontrée par Minty sont les espaces de Hilbert. Nous énonçerons:

THEOREME. *Soit X un espace de Banach uniformément convexe ainsi que son dual X^*, et qui n'est pas un espace de Hilbert. Il existe un sous-ensemble A de $X \times X$ maximal accrétif, mais non m-accrétif.*

Nous utiliserons la proposition suivante:

PROPOSITION. *Soit X un espace de Banach uniformément convexe ainsi que son dual X^* et soit A un ensemble accrétif ayant les propriétés suivantes:*

(i) $0 \in \operatorname{conv} D(A)$.

(ii) *il existe un voisinage* $v(0)$, *tel que pour tout A' accrétif contenant A*

$$v(0) \cap D(A') = \phi.$$

Alors, il n'existe aucum ensemble B m-accrétif contenant A. En effect, si B est un ensemble m-accrétif, d'après un résultat de Crandall (cf. Brezis-Pazy [1]), $\overline{D(B)}$ est convexe. Donc, si B est m-accrétif contenant A, d'apres (i): $0 \in \overline{D(B)}$. Or ceci contredit (ii) et cela démontre donc notre proposition. Nous démontrerons d'abord le théorème énoncé ci-dessus pour un espace X de dimensìon 2, puis le généraliserons dans une deuxième étape.

1. Définition et Rappels

X désigne ici un espace de Banach de norme $|\ \ |$ et de dual X^*. On appelle application de dualité (notée J) l'application (multivoque) de X dans X^*

$$\forall x \in X \qquad J(x) = \{f \in X^* \mid \ |f|_{X^*} = |x|_X \ \text{ et } \ (f, x) = |x|^2\}$$

(Grâce au théorème de Hahn-Banach, on sait que $\forall x \in X\ J(x) \neq \phi$). On dit que X est strictement convexe si:

$$\forall x_1 \neq x_2 \quad |x_1| = |x_2| = 1$$

pour tout λ telque $0 < \lambda < 1$

$$|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2| < 1.$$

On dit que X est uniformément convexe si en outre: $\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0$ tel que $\forall x_1, x_2\ |x_1| = |x_2| = 1\quad |x_1 - x_2| > \eta$ entraine

$$\left|\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \leqq 1 - \epsilon.$$

Il est bien connu que, si X est de dimension finie, X est strictement convexe si et seulement si X est uniformément convexe.

Nous résumerons dans la proposition suivante les résultats classiques cf. Browder [3] sur les notions que nous venons de définir:

PROPOSITION.

a) *J est, pour tout espace de Banach X, faiblement continue au sens suivant:*

$$\forall x_n \to x \quad \textit{et si} \quad \forall n \quad y_n \in J(x_n)$$

alors $y_n \rightharpoonup y$ et $y \in J(x)$.

b) *si X est strictement convexe, J est injective.*

c) *si X^* est strictement convexe, alors pour tout x, $\{J(x)\}$ est réduit à un seul élément.*

Rappelons enfin que la définition des ensembles accrétifs donnée au début est équivalente à la suivante (cf Kato [8]).

$$\forall (x, u) \in A \quad (y, v) \in A \quad \exists f \in J(x - y)$$

tel que: $(u - v, f) \geqq 0$.

Désignons par p_1 la projection de $X \times X$ sur X définie par: $(x, u) \xrightarrow{p_1} x$. L'image de A par p_1 s'appelle le domaine de A. Enfin, il résulte du lemme de Zorn que tout ensemble accrétif est inclu dans un ensemble maximal accrétif.

2. Cas $n = \dim X = 2$

Nous allons montrer, compte tenu de ce qui précède, que dans un espace de Banach de dimension 2, strictement convexe ainsi que son dual, mais qui n'est pas un espace de Hilbert, il existe un ensemble A accrétif qui n'est contenu dans aucun ensemble m-accrétif.

En réalité (cf. Cernes, [5]) on peut toujours construire un tel ensemble pour le cas ou X, de dimension 2, n'est ni un espace de Hilbert, ni un espace dont la boule-unité est un parallélogramme, (sans donc supposer X ou X^* strictement convexes), mais nous nous limiterons au cas énoncé précédemment (cf. aussi Crandall-Liggett, [6]).

Nous allons donc maintenant construire un ensemble A accrétif, tel que $D(A)$ soit un ensemble fini, et que A possède les propriétés (i) et (ii) de la Proposition donnée dans l'introduction.

Pour ceci, soit $S_1(X)$ le cercle-unité de X, c'est à dire:

$$S_1(X) = \{x \in X \mid \quad |x| = 1\}.$$

Nous allons montrer qu'il existe $i \in S_1(X)$ tel que $J(i) = i$.
C'est une conséquence immédiate du théorème de Borsuk, mais on peut aussi donner de ce fait la démonstration élémentaire suivante:

Soit a un point de $S_1(X)$ dont la distance euclidienne à l'origine est maximale. Le cercle de centre 0 et de rayon $0a$ est donc tangent en a à $S_1(X)$, et la normale en a à $S_1(X)$ est donc bien portée par $0a$. Posant $0a = i$, on voit bien qu'alors $J(i) = i$. Il est d'autre part facile de voir qu'on peut choisir trois points $x_0 = i$, x_1, x_2 de $S_1(X)$ tels que:

1) 0 appartienne à l'interieur du triangle $x_0\, x_1\, x_2$.
2) les $J(x_l)$ soient tous distincts $l = 0, 1, 2$.
3) si $H_l = \{z \in X \mid \quad (z, J(x_l)) \leqq 0\}$

$$\bigcap_{l=0}^{2} H_l = \{0\}. \tag{2}$$

Posant $\mu_0 = -\varepsilon x_0 (\varepsilon > 0)$ $\mu_1 = \mu_2 = 0$ on voit alors que si

$$H'_l = \{z \mid (z - \mu_l,\ J(x_l)) \leqq 0\}$$

$$\bigcap_{l=0}^{2} H_l = \varnothing. \tag{3}$$

Définissons aussi les $D_l = \{z \mid (z - \mu_l,\ J(x_l)) = 0\}$.
On peut d'ailleurs supposer x_1 et x_2 tels que $(x_1, j) > 0$, $(x_2, j) < 0$ (j designe le

vecteur directement perpendiculaire a i).
Il est clair qu'alors, pour tous t_1, t_2 positifs:

$$0 \in \operatorname{conv}(x_0, t_1x_1, t_2x_2).$$

Posons alors:

$$y_0 = x_0 \quad y_1 = t_1x_1 \quad y_2 = t_2x_2.$$

Enfin, soit h un réel et appelons M_0 le point de D_0 d'ordonnée h.

Menons alors par M_0 les droites δ_1 et δ_2 définies par:

$$\delta_l = \{z \mid (z - M_0, \quad J(y_l - y_0)) = 0\}.$$

Soient alors $M_1 = D_1 \cap \delta_1$ et $M_2 = D_2 \cap \delta_2$. (les D_l et δ_l n'étant pas parallèlles M_1 et M_2 existent bien) On définira

$$A = \{(y_0, M_0; \quad (y_1, M_1); \quad (y_2M_2)\}.$$

Montrons que A est accrétif.

En effet, par définition des δ_l: $(M_l - M_0 . J(y_l - y_0)) = 0 \quad l = 1, 2$.

Reste à vérifier

$$(M_2 - M_1, \quad J(y_2 - y_1)) \geqq 0. \tag{4}$$

Supposons maintenant que, pour tous choix des $y_l (l = 0, 1, 2)$ vérifiant les conditions précédentes, on ne puisse réaliser (4) . Un calcul de géometrie analytique montre qu'on devra alors avoir: $(J(y_2 - y_1), W) = 0$ où W est un vecteur de composantes

$$\alpha - \beta - \lambda + \mu$$

$$\alpha\mu - \beta\lambda.$$

(où α, β, λ, μ designent les pentes de D_1, D_2, δ_1, δ_2 respectivement). Le lemme technique suivant, que nous démontrerons en detail dans l'appendice, nous permet d'affirmer que X est alors un espace de Hilbert.

LEMME. *Soient i et v definis par*:

$$J(i) = i \quad J(v) \quad \text{colinéaire à } j.$$

Pour $u = ai + bv$ (a et b réels) posons:

$L(u)$ = pente de la tangente a $S_1(X)$ au point $u' = \dfrac{u}{|u|}$, soient

$$y_l = \zeta_l i + \eta_l v \quad l = 1,2$$

avec

$$\eta_1 > 0 \quad \eta_2 < 0 \quad \zeta_1 < 0 \quad \zeta_2 < 0.$$

Posons

$$\alpha = L(y_1) \quad \beta = L(y_2) \quad \lambda = L(y_1 - i) \quad \mu = L(y_2 - i);$$

si

$$W = [\alpha - \beta - \lambda + \mu]i + (\alpha\mu - \beta\lambda)j$$

la relation (4) $(J(y_2 - y_1), W) = 0$ *pour tous les choix des y satisfaisant aux conditions précédentes, entraîne que X est un espace de Hilbert.*

Comme nous avons supposé que X n'est pas un espace de Hilbert, on peut donc construire un tel A accrétif.

Nous allons maintenant montrer que:

$$0 \in \operatorname{conv} D(A) \quad \text{et} \quad \forall A' \quad \text{accrétif} \quad A' \supset A \quad 0 \notin D(A')$$

En effet, soit $(0, z)$ élément d'un tel A'.

Comme les M_l appartiennent aux droites D_l, l'accrétivité de A' exige que, pour tout l, $z \in H'_l$.

Or, ceci est incompatible avec (3).

Enfin, les H' étant fermés, et J fortement continue, on voit qu'il existe un voisinage $v(0)$ tel que

$$\forall A' \supset A \quad A' \text{ accrétif} \quad v(0) \cap D(A') = \varnothing. \tag{5}$$

Il suffit d'appliquer à A la proposition de l'introduction pour démontrer le théorème, dans le cas $n = 2$.

3. Cas $n = \dim X = 3$

Nous allons maintenant démontrer le théorème pour $n = 3$, en construisant un ensemble A accrétif vérifiant les propriétés (i) et (ii), puis en lui appliquant la proposition de l'introduction.

X n'étant pas un espace de Hilbert, il existe, d'après un resultat classique (cf. Day, [5]) un sous-espace V de dimension 2 qui n'est pas un espace de Hilbert. Considerons dans V l'ensemble A construit dans le cas $n = 2$, vérifiant (5).

Soit $D(A) = \{y_0, y_1, y_2\} \subset V$.

Soit k un vecteur de X tel que:

$$|k| = 1 \quad \text{et} \quad V = \{z \,|\, (z, J(k)) = 0\}.$$

(Un tel k existe, car J est surjective.) (5) implique que les H'_i definis par:

$$H'_i = \{z \,|\, (z - w_i, J(y_i)) \leqq 0, [\, y_i, w_i] \in A\}$$

ont avec V une intersection vide.

Il est même facile (par un raisonnement de continuité) de trouver $h > 0$ tel que:

$$\left(\bigcap_{i=0}^{2} H'_i\right) \cap \{z \in X \,|\, \quad |(z, J(k))| \leqq h\} = \varnothing. \tag{6}$$

Soit alors A_1 le prolongement de A défini par:

$$A_1 = A \cup \{Rk, hk\} \cup \{-Rk, -hk\}$$

ou R est un réel assez grand pour que A_1 soit accrétif. Un tel choix est possible car J est uniformément continue et:

$$(J(\varepsilon hk - y_i), \quad \varepsilon hk - w_i) = (J(\varepsilon Rk), \quad \varepsilon hk - w_i)$$

$$+ [(J(\varepsilon Rk - y_i) - J(\varepsilon Rk), \quad \varepsilon hk - w_i)]$$

et $(J(\varepsilon hk), \quad \varepsilon hk - w_l = Rh > 0.$

$$(\varepsilon = \pm 1).$$

Soit alors A' un prolongement accrétif de A_1.
Soit z tel que $(0, z) \in A'$.
On peut toujours ecrire $z = z_0 + \alpha k$, où $z_0 \in V$ et $\alpha \in R$.

(6) implique (6'). $\alpha > h$ ou $\alpha < -h$. Mais alors l'accrétivité de A' aux points $(0, z)$ et (Rk, hk), $(0, z)$ et $(-Rk, -hk)$ entraine (7): $-h \leqq \alpha \leqq +h$.

(6') et (7) sont contradictoires donc:

$$\forall A' \quad \text{accrétif } A' \supset A_1 \quad 0 \in D(A').$$

On montre alors de même que précédemment que A' a bien les propriétés (i) et (ii) et ceci termine alors le cas $n = 3$.

4. Cas géneral.

(X de dimension quelconque finie ou infinie)

Utilisant les résultats du cas $n = 2$ et $n = 3$, nous allons de nouveau construire un ensemble A accrétif ayant les propriétés (i) et (ii), puis conclure de manière analogue aux cas précédents.

Si X n'est pas un espace de Hilbert, il existe (cf. Day, [7]) un sous-espace V de X de dimension 2 qui n'est pas un espace de Hilbert.
A designant l'ensemble accrétif associé à V comme dans le Sec. 2, définissons le sous-espace T.

$$T = \{z \in X \mid (z, J(y_l)) = 0 \quad l = 0, 1, 2\}.$$

Soit alors A_0 un prolongement accrétif de A tel que $0 \in D(A_0)$ .Il est facile de voir que si $(0, z) \in A_0$ et si $z = z_0 + \tau$ où $z_0 \in X$ et $\tau \in T$, le prolongement A_0' de A defini par $A_0' = A \cup \{0, z_0\}$ est accrétif.
D'autre part, un supplémentaire T' de T dans X est de dimension au moins 2 (car les $J(y_i)$ ne sont pas colinéaires) et au plus 3.

Les résultats des $n = 2$ et $n = 3$ permettent donc toujours de construire un ensemble A accrétif tel que:

(i) $D(A)$ fini et $0 \in \operatorname{conv} D(A)$

(ii') $\forall A'$ accretif $A' \notin D(A')$.

Reste à montrer que (ii') implique qu'on peut construire un ensemble $B \supset A$ possédant la propriéte (ii) pour conclure à l'aide de la proposition de l'introduction. Montrons d'abord qu'il est possible de trouver un nombre $R > 0$ tel que si B est défini par:

$$B = A \cup \left\{ \bigcup_{|z|=R} \{z, z\} \right\}$$

B soit accrétif.

Il faut montrer que, pour tout z ($|z| = R$) et tout $(y_l, w_l\} \in A$ on a

$$(z - w_l, J(z - y_l)) \geqq 0.$$

Posons (8) $\Phi_l(z) = (z - w_l, J(z - y_l))$.
On a

$$\Phi_l(z) = (z - y_l, J(z - y_l)) + (y_l - w_l, J(z - y_l));$$

utilisant alors la définition de J et l'inégalite de Schwarz on a

$$\Phi_l(z) \geqq |z - y_l|^2 - |z - y_l| \quad |y_l - w_l|.$$

Donc pour $|z| \to +\infty$.

$$\Phi_l(z) \to +\infty.$$

Comme l décrit un ensemble fini, on peut bien chosir R tel que B soit accrétif.

Soit alors C un prolongement m-accrétif de B. Pour tout u de norme inférieure ou égale à 1, soit v tel que $(u, v) \in C$.

On a

$$\left(\frac{v}{|v|} R - v, J\left(\frac{v}{|v|} R - u \right) \right) \geqq 0$$

soit

$$\left(\frac{R}{|v|} - 1 \right) \left(v, J\left(\frac{v}{|v|} R - u \right) \right) \geqq 0,$$

soit

$$\left(\frac{1}{|v|} - \frac{1}{R} \right) \left(v, J\left(\frac{v}{|v|} - \frac{u}{R} \right) \right) \geqq 0.$$

Comme J est uniformément continue, on peut choisir $R > 0$ tel que de

$$\left(v, J\left(\frac{v}{|v|}\right)\right) = |v|$$

résulte

$$\left(v, J\left(\frac{v}{|v|} - \frac{u}{R}\right)\right) \geqq 0$$

donc on a

$$\frac{1}{|v|} - \frac{1}{R} \geqq 0.$$

Soit:

(9) $\forall u$ tel que $|u| = s$ et v tel que $(u, v) \in C$.

$$|v| \leqq R.$$

Suppons alors que (ii) soit fausse pour B. Il existe alors un filtre d'ensembles accrétifs C_α contenant B, des $(\zeta_\alpha, \tau_\alpha) \in C_\alpha$ tels que

$$|\zeta_\alpha| \to 0 \quad \text{donc} \quad |\tau_\alpha| < R$$

et $\forall l$ $(y_l, w_l) \in A$.

(10) $$(\tau_\alpha - w_l, J(\zeta_\alpha - y_l)) \geqq 0.$$

τ designant une valeur d'adhérence faible des τ_α, on obtient:

(11) $$(\tau - w_l, J(-y_l)) \geqq 0.$$

Il résulte alors de (11) que, si C_1 est défini par

$$C_1 = A \cup \{0, \tau\},$$

C_1 est accrétif, prolonge A et $0 \in D(C_1)$.

Ceci contredit (ii').

Donc l'opérateur B a bien les propriétes (i) et (ii) et on a alors bien démontré le théorème dans le cas général.

Appendice

Nous allons maintenant donner la démonstration du lemme utilisé dans le cas $n = 2$.

a) dans une premiere étape, supposons:

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta \neq 0.$$

(4) s'ecrit alors: W colinéaire a i, soit $\alpha\mu - \beta\lambda = 0$. Posons alors $\Phi(r) = L(i + rv), \Phi$ est définie pour tout r.

On a alors:

$$\alpha = \Phi\left(\frac{\eta_1}{\zeta}\right) \quad \beta = \Phi\left(\frac{\eta_2}{\zeta}\right) \quad \lambda = \Phi\left(\frac{\eta_1}{\zeta - 1}\right) \quad \mu = \Phi\left(\frac{\eta_2}{\zeta - 1}\right).$$

On doit donc avoir:

$$\frac{\Phi\left(\frac{\eta_2}{\zeta - 1}\right)}{\Phi\left(\frac{\eta_2}{\zeta}\right)} = \frac{\Phi\left(\frac{\eta_1}{\zeta - 1}\right)}{\Phi\left(\frac{\eta_1}{\zeta}\right)}. \tag{12}$$

Posant:

$$x = \frac{\zeta}{\zeta - 1} \qquad y = \frac{\eta_2}{\zeta}$$

et supposant en outre que: $\eta_1 = -\zeta$,

$$\forall y > 0 \qquad \forall x \in]0, 1[. \qquad \Phi(xy) \times \Phi(-1) = \Phi(-x)\Phi(y). \tag{13}$$

Il est alors facile de montrer que, vu que $\lim_{x \to 0} \Phi(x) = +\infty$

$$\exists p > 0 \qquad \kappa < 0 \qquad \Phi(x) = \kappa\,|x|^{-p},$$

de même, intervertissant les rôles de y_1 et y_2

$$\exists p' > 0 \qquad \kappa' > 0 \qquad \Phi(x) = \kappa'\,|x|^{-p'}.$$

(12) s'écrit alors:

$$\frac{\kappa\left|\dfrac{\eta_2}{\zeta-1}\right|^{-p}}{\kappa\left|\dfrac{\eta_2}{\zeta}\right|^{-p}}=\frac{\kappa'\left|\dfrac{\eta_1}{\zeta-1}\right|^{-p'}}{\kappa'\left|\dfrac{\eta_1}{\zeta}\right|^{-p'}}$$

soit $\forall\zeta$

$$\left|\frac{\zeta-1}{\zeta}\right|^{p}=\left|\frac{\zeta-1}{\zeta}\right|^{p'}$$

donc $p=p'$.

b) dans une deuxième partie, nous allons montrer que

$$-\kappa=\kappa' \qquad \text{et} \qquad p=1.$$

Pour cela, revenons au cas général du problème du lemme (avec $\zeta_1\neq\zeta_2$).

Supposons ici $\zeta_1<\zeta_2$, (4) s'ecrit

$$\kappa\left|\frac{\zeta_2-\zeta_1}{\eta_2-\eta_1}\right|^{p}=\frac{\kappa\left|\dfrac{\zeta_1}{\eta_1}\right|^{p}\kappa'\left|\dfrac{\zeta_2-1}{\eta_2}\right|^{p}-\kappa\left|\dfrac{\eta_1-1}{\eta_1}\right|^{p}\kappa'\left|\dfrac{\zeta_2}{\eta_2}\right|^{p}}{\left|\dfrac{\zeta_1}{\eta_1}\right|^{p}-\kappa\left|\dfrac{\zeta_1-1}{\eta_1}\right|^{p}-\kappa'\left|\dfrac{\zeta_2}{\eta_2}\right|^{p}+\kappa'\left|\dfrac{\zeta_2-1}{\eta_2}\right|} \tag{14}$$

Divisons par $|\zeta_1|^p$ des deux cotés et faisons tendre ζ_1 vers $-\infty$, ce qui est compatible avec les hypothèses faites sur ζ_1.

$$\frac{\kappa}{|\eta_2-\eta_1|^p}\lim_{\zeta_1\to-\infty}\left[\kappa\left|\frac{\zeta_1}{\eta_1}\right|^{p}-\kappa\left|\frac{\zeta_1-1}{\eta_1}\right|^{p}-\kappa'\left|\frac{\zeta_2}{\eta_2}\right|^{p}\right.$$

$$\left.+\kappa'\left|\frac{\zeta_2-1}{2}\right|^{p}\right]=\frac{\kappa\kappa'}{|\eta_1|^p}\left(\left|\frac{\zeta_2-1}{\eta_2}\right|^{p}-\left|\frac{\zeta_2}{\eta_2}\right|^{p}\right). \tag{15}$$

La limite du premier membre de (15) doit être finie, donc il faut que $p\leqq 1$. Si $p<1$, alors

$$|\zeta_1|^p-|\zeta_1-1|^p\to 0 \quad \text{si} \quad \zeta_1\to-\infty,$$

(15) devient

$$\frac{1}{|\eta_2-\eta_1|^p}\quad\left|\frac{2^{-1}}{\eta_2}\right|^p-\left|\frac{\zeta_2}{\eta_2}\right|^p=\frac{1}{|\eta_1|^p}\quad\left|\frac{\zeta_2-1}{\eta_2}\right|^p-\left|\frac{\zeta_2}{\eta_2}\right|^p$$

donc

$$\frac{1}{|\eta_2-\eta_1|^p}=\frac{1}{|\eta_1|^p},$$

ce qui est faux en général. Donc $p = 1$ et on vérifie alors que, pour que (14) soit une identité, il faut $\kappa = -\kappa'$.

On peut alors écrire:

(16) $$\Phi(x)=-\frac{\kappa}{x}\ (\kappa>0 \text{ et } x\neq 0).$$

c) pour démontrer le lemme, reste à montrer que $S_1(X)$ est une ellipse. Pour ceci soient m et n les coordonnées d'un point de $S_1(X)$ dans le repère $(0, i, j)$. Comme i et v sont linéairement indépendants, on peut écrire:

$$\vec{OM}=mi+nj=ai+bv$$

ou

$$\begin{matrix} m=a+bk_1 & & a=m-\dfrac{nk_1}{k_2} \\ & \Rightarrow & \\ n=bk_2 & & b=\dfrac{n}{k_2} \end{matrix}$$

et

$$L(ai+bv)=L(mi+nj)=-\frac{\kappa}{\frac{b}{a}}=-\kappa\left(\frac{k_2m-k_1n}{n}\right)=\frac{dn}{dm}$$

soit $ndn+\kappa k_2\, mdm=-\kappa k,\, ndm$.

Posons

$$(m,n)=\kappa k_2\frac{m^2}{2}+\frac{n^2}{2},$$

et intégrons le long de l'arc S_+ de $S_1(X)$ defini par $n \geqq 0$ de $+i$ à $-i$.
Il vient:

$$0 = \phi(-1,0) - \phi(1,0) - k_1 \left[\int_{S_+} ndm \right].$$

Et on voit facilement que $\int_{S_+} ndm > 0$.
Donc $k_1 = 0$, et X est bien un espace de Hilbert de dimension 2, l'équation de $S_1(X)$, étant $\phi(m, n) = c$.

Bibliographie

1. H. Brézis and A. Pazy, *Acretive sets and Differential Equations in Banach spaces*, Israel J. Math. **8** (1970), 367–383.

2. F. Browder, *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces*, Proc. Symp. Amer. Math. Soc. 1968 (Chicago).

3. F. Browder, *Sur un théorème de Beurling et Livingstone* Canad. J. Math. **17** 259–269.

4. B. Calvert, *Maximal accretive is not m-accretive*, Boll. Un. Ital. **6** (1970), 1042–1044.

5. A. Cernes, Thèse, Université de Paris VI, Juin 1972.

6. M. Crandall et T. Liggett, *A theorem and a counterexample in the theory of nonlinear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **160** (1971), 263–278.

7. M. Day *Some characterizations of inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947).

8. T. Kato *Nonlinear semigroups and evolution equations*, J. Math. Soc. Japan. **19** (1967), 508–520.

9. G. Minty, *Monotone operators in Hilbert spaces*, Duke Math. **29** (1962), 341–346.